الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2022

– الموضوع –

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

SSSSSSSSSSSSSSSSSS-SS | NS 25

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	مسلك العلوم الرياضية – أ و ب - الترجمة بالفرنسية	المعامل	9

CONSIGNES :

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.

- L'épreuve comporte quatre exercices indépendants.

- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'EXERCICE1 se rapporte à l'analyse ……..……..…(10 pts)

- L'EXERCICE2 se rapporte aux nombres complexes.....….(3.5 pts)

- L'EXERCICE3 se rapporte à l'arithmétique ……....(3 pts)

- L'EXERCICE4 se rapporte aux structures algébriques.....(3.5 pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

EXERCICE1 :(10 points)

0.25 **A**–1– Vérifier que : $(\forall x \in]-1,+\infty[)$; $0 \leq 1 - x + x^2 - \frac{1}{x+1} \leq x^3$

0.25 2– En déduire que : $(\forall x \in]-1,+\infty[)$; $0 \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ln(1+x) \leq \frac{x^4}{4}$

B– On considère la fonction f définie sur $I = [0,+\infty[$ par :

$$f(0) = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } x \text{ de }]0,+\infty[\; ; \; f(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 1–a) Montrer que f est continue à droite en 0

0.5 b) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0.5 c) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2–a) Montrer que : $(\forall x \in]0,+\infty[)$; $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^3}$

0.5

où $g(x) = x + \frac{x}{x+1} - 2\ln(1+x)$

0.5 b) Montrer que : $(\forall x \in I)$; $0 \leq g'(x) \leq x^2$

0.25 c) En déduire que : $(\forall x \in I)$; $0 \leq g(x) \leq \frac{x^3}{3}$,

0.25 d) Déterminer le sens de variation de f sur I

0.25 3–a) Dresser le tableau de variations de f

b) Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5

(On prendra $\|\vec{i}\| = 2cm$ et $\|\vec{j}\| = 2cm$)

0.5 **C**–1– Montrer qu'il existe un unique réel $a \in]0;1[$ tel que $f(a) = a$

2– On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \frac{1}{3} \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_{n+1} = f(u_n)$$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; u_n \in [0;1]$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; |u_{n+1} - a| \leq \left(\frac{1}{3}\right) u_n - a|$

0.5 c) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \; ; \; |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

0.25 d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a

D- Pour tout $x \in I$, on pose : $F(x) = \int_x^1 f(t)dt$

0.5 1- Montrer que la fonction F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour tout $x \in I$

0.5 2-a) En utilisant la méthode d'intégration par parties, montrer que :

$$(\forall x \in]0,+\infty[) \quad ; \quad F(x) = 2\ln 2 - \left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$$

0.5 b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$, puis en déduire que : $\int_0^1 f(t)dt = 2\ln 2 - 1$

0.5 c) Calculer en cm^2, l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$

E- On pose : pour tout k de $\mathbb{N}$, $D_k = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$

et pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{k=n-1} D_k$

0.25 1-a) Vérifier que : $(\forall k \in \mathbb{N}) \; ; \quad 0 \leq D_k \leq f(k) - f(k+1)$

0.5 b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; ; \quad 0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$

0.25 2-a) Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

0.25 b) En déduire que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

0.25 c) Montrer que la limite l de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie : $\frac{3}{2} - 2\ln 2 \leq l \leq \frac{1}{2}$

EXERCICE2 :(3.5 points)

Soit m un **nombre complexe non nul** donné et $j = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{i\frac{2\pi}{3}}$

I- On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z

$$(E_m) : \quad z^2 + mj^2 z + m^2 j = 0$$

0.5 1- Vérifier que : $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$

0.25 2-a) Montrer que le discriminant de l'équation (E_m) est : $\Delta = (m(1-j))^2$

0.5 b) Déterminer z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E_m)

0.5 3- Dans cette question, on suppose que : $m = 1 + i$

Montrer que $(z_1 + z_2)^{2022}$ est un imaginaire pur.

II- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit j la transformation du plan complexe qui à tout point $M(z)$ fait correspondre le point $M'(z')$ tel que : $z' = (1 + j)z$

0.25 1- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de l'application j

2- On considère les points A, B et C d'affixes respectives m, mj et mj^2 et on note $A'(a')$, $B'(b')$ et $C'(c')$ les images respectives des points A, B et C par l'application j et soient $P(p)$, $Q(q)$ et $R(r)$ les milieux respectifs des segments $[BA']$, $[CB']$ et $[AC']$

0.75 a) Montrer que : $a' = -mj^2$, $b' = -m$ et $c' = -mj$

0.25 b) Montrer que : $p + qj + rj^2 = 0$

0.5 c) En déduire que le triangle PQR est équilatéral.

EXERCICE3 :(3 points)

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E_n) : $(x+1)^n - x^n = ny$

Soit (x,y) une solution de l'équation (E_n) dans $\mathbb{Z}^2$ et soit p **le plus petit diviseur premier** de n

0.25 1-a) Montrer que : $(x+1)^n \equiv x^n \ [p]$

0.25 b) Montrer que p est premier avec x et avec $(x+1)$

0.25 c) En déduire que : $(x+1)^{p-1} \equiv x^{p-1} \ [p]$

0.5 2- Montrer que si n est pair, alors l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

3- On suppose que n est impair.

0.5 a) Montrer qu'il existe un couple (u,v) de $\mathbb{Z}^2$ tel que : $nu + (p-1)v = 1$

(On rappelle que p est le plus petit diviseur premier de n)

0.25 b) Soient q et r respectivement le quotient et le reste dans la division euclidienne de u par $(p-1)$. Vérifier que : $nr = 1 - (p-1)(v+nq)$

c) On pose : $v_n = -(v + nq)$. Montrer que : $v_n \equiv 0$

0.5

0.5 d) Montrer que l'équation (E_n) n'admet pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$

EXERCICE4 :(3.5 points)

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire non commutatif d'unité

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire et intègre.

Soit $E = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & 3b \\ b & a \end{pmatrix} / (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

0.25 1-a) Montrer que E est un sous-groupe de $(M_2(\mathbb{R}),+)$

0.25 b) Vérifier que pour tout a,b,c et d de $\mathbb{R}$, on a :

$$M(a,b) \times M(c,d) = M(ac + 3bd, ad + bc)$$

0.5 c) Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif et unitaire.

2- Soit φ l'application définie de E vers $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \varphi(M(a,b)) = |a^2 - 3b^2|$$

0.5 Montrer que φ est un homomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{R},\times)$

3- Soit $M(a,b) \in E$

0.25 a) Montrer que $M(a,b) \times M(a,-b) = (a^2 - 3b^2).I$

0.5 b) Montrer que si $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ alors $\varphi(M(a,b)) = 1$

0.5 c) On suppose que $\varphi(M(a,b)) = 1$.

Montrer que $M(a,b)$ est inversible dans $(E,\times)$ et préciser son inverse.

0.25 4-a) Montrer que : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad ; \quad \varphi(M(a,b)) = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$

0.25 b) En déduire que l'anneau $(E,+,\times)$ est intègre.

0.25 c) Est-ce que $(E,+,\times)$ est un corps ? justifier votre réponse.

FIN