الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2017

- الموضوع -

RS 25

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني والتعليم العالي والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

★★

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب) (الترجمة الفرنسية)	المعامل	9

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte 4 exercices indépendants.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- L'exercice1 se rapporte aux structures algébriques.....(4.5pts)
- L'exercice2 se rapporte au calcul des probabilités……(3pts)
- L'exercice3 se rapporte aux nombres complexes ……(2.5pts)
- L'exercice4 se rapporte à l'analyse…….(10pts)

L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé

L'usage de la couleur rouge n'est pas autorisé

Exercice 1 : (4.5 pts)

On rappelle que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif, que $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un espace vectoriel réel et que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire, non commutatif et non intègre.

On pose : $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $J=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ et $M(x,y)=\begin{pmatrix}x & -3y\\ y & x\end{pmatrix}$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et

$E=\{M(x,y)/(x,y)\hat{I}\ ¡^2\}$

0.75 1-Montrer que E est un sous espace vectoriel de $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$, de dimension 2

0.5 2-a) Montrer que E est stable dans $(M_2(\mathbb{R}),\times)$

0.75 b) Montrer que $(\mathrm{E},+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

3- On pose $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$ et on considère l'application φ de $\mathbb{R}^*$ vers E^* définie par :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \qquad \varphi(x+iy)=M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

0.75 a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ sur $(E^*,\times)$

0.5 b) En déduire que $(\mathrm{E}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

0.75 c) Montrer que : $J^{2017}=\mathrm{j}\left(3^{1008}\sqrt{3}i\right)$,puis déterminer l'inverse de la matrice J^{2017} dans $(\mathrm{E}^*,\times)$

0.5 4- Montrer que $(\mathrm{E},+,\times)$ est un corps commutatif.

Exercice 2 : (3 pts)

Un sac contient 2n boules (n dans ¥ *) , dont n sont blanches et n sont noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

Un jeu consiste à tirer une boule du sac à noter sa couleur et à la remettre dans le sac, puis à tirer du même sac une nouvelle boule et à noter aussi sa couleur.

La règle du jeu indique que :

- Si les deux boules tirées sont blanches, on gagne 20 points .
- Si les deux boules tirées sont noires, on perd 20 points .
- Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes, le gain est nul .

0.75 1- Calculer la probabilité de gagner 20 points , la probabilité de perdre 20 points et la probabilité de réaliser un gain nul.

2- On répète 5 fois le jeu précédent.

0.5 a) Calculer la probabilité de gagner 100 points.

1 b) Calculer la probabilité de gagner 40 points.

3- Au cours d'un seul jeu ,on considère la variable aléatoire X qui prend uniquement

les valeurs -20 si on perd , 0 si le gain est nul et +20 si on gagne.

0.5 a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

0.25 b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X

Exercice 3: (2.5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

Soient M le point d'affixe le nombre complexe non nul z

et M' le point d'affixe $z'=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$

0.5 1- Déterminer le nombre complexe z pour que les deux points M et M' soient confondus.

2- On suppose que M est distinct des points A et B d'affixes respectifs 1 et -1

0.5 Montrer que : $\frac{z'+1}{z'-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$

0.75 3- Soit (Δ) la médiatrice du segment $[AB]$

Montrer que : si M appartient à (Δ) alors M' appartient à (Δ)

4- Soit (Γ) le cercle dont un diamètre est $[AB]$

0.75 Montrer que : si M appartient à (Γ) alors M' appartient à la droite (AB)

EXERCICE4 :(10 pts)

Partie1 :

Soit f la fonction numérique définie sur $I=[0,+\infty[$ par :

$$f(0)=1 \quad \text{et} \quad \forall x\in]0,+\infty[\qquad f(x)=\frac{\arctan(x)}{x}$$

0.5 1- Montrer que f est continue sur l'intervalle I

0.5 2-a) Soit x dans I .Montrer que : $\forall t\in[0,x] \quad \frac{1}{1+x^2}\le\frac{1}{1+t^2}\le 1$

0.5 b) Montrer que : $\forall x\in[0,+\infty[\quad \frac{x}{1+x^2}\le\arctan(x)\le x$

0.75 c) Montrer que f est dérivable à droite en 0

0.5 3- a) Sachant que f est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$, calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0,+\infty[$

0.25 b) Etudier les variations de f sur l'intervalle I

Partie 2 :

Soit g la fonction numérique définie sur $I=[0,+\infty[$ par :

$g(0)=1$ et $\forall x\in]0,+\infty[$ $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$

0.5 1- a) Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$ $f(x)\le g(x)\le 1$

0.75 b) Montrer que g est dérivable à droite en 0

0.75 2- Montrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que :

$\forall x\in]0,+\infty[$ $g'(x)=\frac{1}{x}\left(f(x)-g(x)\right)$

0.25 3- Montrer que g est décroissante sur l'intervalle I

0.75 4-a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)dt=0$

(remarquer que : $\forall x\in]0,+\infty[$ $0<\arctan x<\frac{\pi}{2}$)

0.5 b) Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

Partie 3 :

0.75 1- Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une solution unique α dans $]0,1[$

0.5 2- a) Vérifier que : $\forall x\in [0,+\infty[$ $0\le 1-f(x)\le \frac{x^2}{1+x^2}$

(on pourra utiliser la question 2-b)Partie1)

0.75 b) Montrer que : $\forall x\in [0,+\infty[$ $|g'(x)|\le\frac{1}{2}$

3- Soit $(u_n)_{n\ge 0}$ la suite numérique définie par :

$u_0\in\mathbb{R}^+$, $u_{n+1}=g(u_n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$

0.75 a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$

0.75 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\ge 0}$ est convergente.

FIN